05/11/2018

Μάθημα 5º

Ασχολούμαστε και :

$$ΠΑΤ : \begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Συνεχές πρόβλημα

Και μπορούμε να έχουμε το διακριτό ανάλογο με τη μέθοδο Euler.

Άμεση Euler : $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) & , n = 0,1,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Όταν δεν χρειάζεται να εκτιμήσεις την τιμή της f για άλλο πέρα από το γνωστό. Δηλ, χρειάζομαι μόνο προηγούμενη πληροφορία για να υπολογίσω την επόμενη.

Στην Euler έχουμε ομοιόμορφη διαμέριση
$a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^n < \dots < t^N = b$

Το βήμα της διαμέρισης είναι : $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$

και $t^n = a + nh$, $n = 0,1,\dots,N$

Επίσης, είναι μονοβηματική μέθοδος

Το $f(t^n, y^n)$ είναι ίσο με $y'(t^n)$ (αντιστοιχία)

Ισχύει : $y^{n+1} \simeq y(n+1)$

προσεγγιστική λύση — ακριβής λύση

Το $f(t^n, y^n)$

Είναι το ανάπτυγμα Taylor στη γειτονιά του t^n.

(Ανάπτυγμα Taylor)

<u>Παρατήρηση:</u> Θα μπορούσαμε να γράψουμε το ⊛ ως:

$$y(t^{n+1})\Big|_{t^n} = y(t^n) + h \underbrace{y'(t^n)}_{= f(t^n, y(t^n))} + O(h^2) \left(= \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \right)$$

2ης τάξης

$$\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Προσεγγιστική τιμή της y στη γειτονιά του t^n με ανάπτυγμα Taylor

- Διακριτό Ανάλογο

$$y' = f(t,y) \Rightarrow \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^n, y(t^n)) \Rightarrow$$

Υπόθεσα εδώ ότι σε αυτό το διάστημα η f παραμένει σταθερή.

Διαφορική μέθοδος διότι χρησιμοποίησα τον ορισμό της παραγώγου προσεγγιστικά (Προσεγγιστική παράγωγος)

$$\Rightarrow \quad y(t^{n+1}) \simeq y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))$$ Διαφορική Μέθοδος

Για να ολοκληρώσω θα πάρω το συνεχές ανάλογο:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

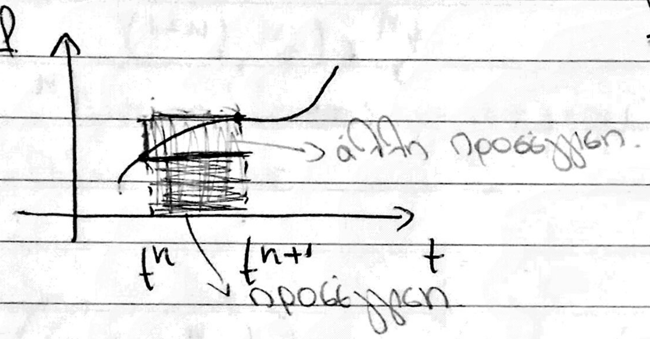
και δημιουργώ μια ολοκληρωτική μέθοδο
και αυτό μπορώ να το κάνω διότι
η ολοκλήρωση συμφέρει όταν έχουμε ασυνέχειες
Στην διαφορική μέθοδο έχουμε θέμα στις ασυνέχειες

Άρα: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq \underbrace{(t^{n+1} - t^n)}_{h} f(t^n, y(t^n))$$

υποθέτω ότι η συνάρτηση είναι σταθερή και παίρνω εμβαδόν

καταχρηστική ισότητα.



(Το τοπικό σφάλμα της μεθόδου είναι ?)

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$$ και πήρα πάλι την άμεση μέθοδο Euler.

Ακόμα κι αν η αναλυτική (ακριβής) λύση πηγαίνει στο μηδέν, με αυτές τις μεθόδους, για πολύ μεγάλο h οι προσεγγιστικές λύσεις γίνονται μη ευσταθείς

Άρα Από το συνεχές στο διακριτό πρόβλημα μπορώ να πάω με 3 τρόπους:

1ος) Διαφορική

2ος) ολοκληρωτική

3ος) Taylor

(*) $\frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$ το σφάλμα κατά Euler

Ορισμός: Όπου "O" ή μεγάλο όμικρον του Landau ή ασυμπτωτικό σύμβολο είναι φραγμένος: $O(t-t_0)\, g(t)$
Γενικά όταν σε μια οριακή διαδικασία $t \to t_0$ η $f(t) = O(g(t))$ τότε η f εκφράζεται ως γινόμενο μιας g φραγμένης συνάρτησης στη γειτονιά του οριακού σημείου t_0

Από τον ορισμό: $f(t) \simeq (t-t_0)^n g(t)$ (Αυτό συμπεραίναμε) και επειδή $g(t)$ φραγμένη, όταν $t \to t_0$ τότε και $(t-t_0)^n g(t) \to 0$

Σχόλια

Η $g(t)$ δε γίνεται να απειρίζεται διότι τότε όχι φραγμένη και δε μπορώ να πάρω το ανάπτυγμα Taylor

Άρα $2^{ης}$ τάξης παράγωγο ($y''(\xi^n)$) να είναι φραγμένη και το $h^2 \to 0$
(Για το ανάπτυγμα Taylor) $O(h^2)$ $\left(\frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right)$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η διαφορά $t-t_0$ και κατ' επέκταση θέλαμε και φραγμένη παράγωγο

Άρα Γι' αυτό συμβολίζω $O(h^2)$ και παραλείπω την y'' διότι είναι φραγμένη και με ενδιαφέρει τι κάνει το $h \to 0$

Άλλο σημαντικό ρόλο έχει τι διαφορά παίρνω
Αν το h πηγαίνει στο 0 και τότε και το σφάλμα $\to 0$

Σχόλιο: Η πρώτης τάξης πληροφορία είναι γραμμική προσέγγιση

$$y|_{t^n} = y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \quad \text{Euler}$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t^n) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi^n)$$

Η Euler είναι η χειρότερη αριθμητική μέθοδος αλλά την αναλύουμε γιατί είναι η απλούστερη

Ο Euler παίρνει μέχρι την 1ης τάξης πληροφορία τις αναλύσεις τις θεωρεί αμελητέες.

Θέματα που πρέπει να αναλύσουμε:

1) Συνέπεια της Euler (τοπικό σφάλμα)
2) Ευστάθεια της Euler
3) Ακρίβεια της Euler (ολικό σφάλμα)

<u>Συνέπεια (Τοπικό Σφάλμα)</u>

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n)) = \delta^n$$ ← τοπικό σφάλμα.

Υποθέτω ότι: $$\delta^n = \underbrace{y(t^{n+1})}_{\text{ακριβής λύση}} - \underbrace{\left(y^n + h f(t^n, y^n)\right)}_{= \tilde{y}^{n+1}}$$

προσεγγιστική λύση.

Τι τάξης είναι το δ^n;

Υποθέτουμε ότι $y \in C^2[a,b]$, τότε:

$$\delta^n = \left[y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right] - \left[y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))\right]$$

Την ακριβή λύση μπορώ να τη προσεγγίσω με Taylor στην περιοχή t^n.

Άρα $$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$$ $\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$

(Άρα όντως C^2 το δ^n)

<u>Συμπέρασμα:</u> Η μέθοδος (άμεση Euler) είναι συνεπής αν το $\delta^n \to 0$ όταν το $h \to 0$ και επιπλέον είναι τουλάχιστον 2ης τάξης ως προς το βήμα της διαμέρισης h

(ιδίως αν $h = 0{,}1$ το h^2 είναι $0{,}0001$)

Άρα: $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) = O(h^2)$ Είναι της τάξης του h^2

Ευστάθεια της Euler.

Θα προσδιορίσω φράγματα για το σφάλμα ε^n της μεθόδου

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ομοιόμορφα ως προς την y $\forall t$

δηλ. $\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Θεωρούμε το διακριτό ΠΑΤ :

$$① \begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n=0,1,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Διαταράσσω την αρχική συνθ.

$$② \begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^n, z^n), & n=0,1,2,\dots \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Με διαμέριση $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$, $h = \frac{b-a}{N}$

$t^n = a + hn$, $N \in \mathbb{N}$

Το σφάλμα περιμένω ότι θα εξαρτάται από :

1) $|y_0 - z_0| = |\varepsilon^0|$, 2) Lipschit, 3) $hN = b-a$

(Βάση γνωστού Θεωρήματος στην συνεχή περίπτωση)

Απόδειξη.

$\varepsilon^n = y^n - z^n$, απο (1) και (2) αφαιρώντας :

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]$$

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \overset{\text{τριγων}}{\leq} |y^n - z^n| + h|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|$$

$$\overset{\text{απο Lipschitz}}{\leq} |y^n - z^n| + hL|y^n - z^n| = (1+Lh)|y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+Lh)|y^n - z^n| \leq$$

$$\leq (1+Lh)^2 |y^{n-1} - z^{n-1}| \leq \dots \leq (1+Lh)^n |y_0 - z_0|$$

Επαγωγικά : $|y^n - z^n| \leq (1+Lh)^n |y_0 - z_0| \leq$

$$\leq e^{Lhn} |y_0 - z_0|$$

$$1 + Lh \leq e^{Lh} \quad \text{γιατί} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

ΔΛΔ $\quad |y^n - z^n| \leq e^{Lnh}|\varepsilon_0| \leq e^{LNh}|\varepsilon_0| \quad \forall n, 0 \leq n \leq N$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)}|\varepsilon_0| \quad \forall n, \ 0 \leq n \leq N$$

άρα και η $\max_n |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)}|\varepsilon_0|$

$$\|\varepsilon^n\|_\infty \leq e^{L(b-a)}|\varepsilon_0| \quad (3)$$

Άρα η (3) ευστάθεια της Euler με $C = e^{L(b-a)}$
για οποιοδήποτε διαμέριση, βήματος h

Ακρίβεια της Euler (Ολικό σφάλμα)

Έστω ότι ισχύει η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz και έστω τα δύο διακριτά μοντέλα ΠΑΤ (1),(2). Τότε ν.δ.ο. $\| \varepsilon^n \|_\infty \leq |\varepsilon^0|$ — Δ09 — όμοιο με πριν

Εδώ δεν έχουμε L μέσα

Θεώρημα. (Εκτίμηση σφάλματος Euler - Ολικό σφάλμα)

Έστω μια συνάρτηση $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ πληροί την ολική συνθήκη του Lipschitz και έστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση του προβλ. αρχ. τιμών.
Αν $y^0, y^1, y^2, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις της Euler για ομοιόμορφη διαμέριση, $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει:

$$\| \varepsilon^n \|_\infty = \max_{0 \leq n \leq N} | y(t^n) - y^n | \leq \underbrace{\frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)}_{\text{σταθερό}} h \quad \text{Τάξης } 1 \ (h^1)$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)| , \quad L : \text{Lipschitz}$$

Το ολικό σφάλμα είναι τάξης h

Παρατήρηση ① Το Θεώρημα μας λέει ότι η ακρίβεια της Euler εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος: $f(L), a, b, y^0$

② Το φράγμα του σφάλματος είναι γινόμενο μιας σταθεράς $C = \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)$ και του h στην 1η δύναμη

Άρα η μέθοδος του Euler έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον 1
(Συνήθως το δείχνουμε με τη βοήθεια ενός παραδείγματος)

Μπορούμε να δούμε ότι η ακρίβεια της Euler είναι ακριβώς ένα μέσω ενός ΠΑΤ

π.χ. $\begin{cases} y' = \overset{a,\ a>0}{\overset{\shortparallel}{2}}t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

βάλαμε 2 γιατί βολεύει στην ολοκλήρωση